SUBJECT: $\frac{7}{12}$

مثال:

$$x\cdot y' - 4y = x^2\sqrt{y}$$

هي معادلة برنولي:

نقسم جميع الحدود على $x\sqrt{y}$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x \Rightarrow \quad (1)$$

المعادلة هي خطية لو نجري التحويل التالي:

$$\sqrt{y} = Z \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} = Z' \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2Z'$$

نعوض في (1)

$$2Z' - \frac{4}{x} Z = x$$

نقسم على 2

$$Z' - \frac{2}{x} Z = \frac{x}{2} \quad (2)$$

خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى — لحلها نتبع طريقة تحويل الثوابت

$$Z' - \frac{2}{x} Z = 0 \quad (3)$$

وهي معادلة ذات متحولات منفصلة

$$\int \frac{dZ}{Z} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln \frac{Z}{c} = 2\ln x = \ln x^2$$

$$\Rightarrow Z = cx^2 \quad (4)$$

$$\Rightarrow Z' = c'x^2 + 2cx$$

نعوض في المعادلة غير متجانسة (2)

$$c'x^2 + 2cx - 2cx = \frac{x}{2}$$

$$c' = \frac{1}{2x} \Rightarrow$$

نكامل الطرفين

$$c = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln x + c_1 \Rightarrow$$

بالتعويض في (4):

$\Rightarrow Z = \frac{x^2}{2} \ln x + c_1 x^2$

بالعودة إلى المتحولات القديمة

$\sqrt{y'} = $

$y = \left[\frac{x^2}{2} \ln x + c_1 x^2 \right]$

---

* معادلة ريكاتي:

هي معادلة من الشكل التالي:

$$y' + P(x) \cdot y + Q(x) \cdot y^2 + R(x) = 0 \quad ①$$

حيث أن كل من $P(x)$ و $Q(x)$ و $R(x)$ دوال مستمرة في x على فترة معينة. فإذا كان $R(x)=0$ المعادلة تصبح برنولي. أما إذا كان $Q(x)=0$ المعادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى.

ولحل معادلة ريكاتي [I] يجب معرفة حل خاص لها وليكن y_1 عندئذٍ نجري التحويل التالي $y = y_1 + Z$ نشتق ونعوض كل من y و y' في المعادلة فنحصل على معادلة برنولي التي حلها العام: $Z = \varphi(x, c)$ عندئذٍ يكون الحل العام لمعادلة ريكاتي [I] بالشكل:

$$y = y_1 + \varphi(x, c)$$

ملاحظة: يستبدل عادةً التحويل: $y = y_1 + Z$ بـ التحويل: $y = y_1 + \frac{1}{Z} ; Z \neq 0$ الذي يحول المعادلة إلى خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى مباشرةً وعندئذٍ يكون الحل العام لمعادلة ريكاتي هو عبارة عن دالة خطية كسرية في الثابت الاختياري من الشكل:

$$y = y_1 + \frac{1}{c \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)}$$

باعه

وإذا كان حل أي معادلة هو عبارة عن دالة خطية كسرية من الثابت ستكون معادلة ريكاتي.

مثال: جد الحل العام علماً أن لها حل خاص من الشكل $y=1$

$y' + 2y - y^2 - 1 = 0$

هي معادلة ريكاتي نجري التحويل التالي:

$$y = y_1 + Z \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + Z \\ y' = Z' \end{cases}$$

بتعويضها في المعادلة

$$Z' + 2(1+Z) - (1+Z)^2 - 1 = 0$$

$$Z' + 2 + 2Z - 1 - 2Z - Z^2 - 1 = 0$$

$$Z' - Z^2 = 0 \Rightarrow Z' = Z^2$$

ذات متحولات منفصلة نفصل متحولاتها فينتج لدينا : نقسم على Z^2

$$\int \frac{dZ}{Z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{Z} = x + c \Rightarrow Z = -\frac{1}{x+c}$$

بالعودة إلى المتحولات القديمة

$$y = 1 - \frac{1}{x+c}$$

مثال: جد الحل العام: $x \cdot y' - y + y^2 - x^2 = 0$ وشكل الحل الخاص $y_1 = ax$

بما أنه حل خاص نعوضه في المعادلة للحصول على قيمة a

$$y_1' = a$$

نعوضها في المعادلة $ax - ax + a^2x^2 - x^2 = 0$

$$x^2(a^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

نختار $a = +1 \Leftarrow \boxed{y_1 = x}$

لحل معادلة ريكاتي نجري التحويل التالي:

$$y = y_1 + \frac{1}{Z}$$

بإجراء هذا التحويل نحولها إلى خطية غير متجانسة:

$$y = y_1 + \frac{1}{Z} \Rightarrow x + \frac{1}{Z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{Z'}{Z^2}$$

SUBJECT:

نعوض التحويل في المعادلة المعطاة :

$$x - x\cdot\frac{Z'}{Z^2} - (x+\frac{1}{Z}) + (x+\frac{1}{Z})^2 - x^2 = 0$$

$$x - x\frac{Z'}{Z^2} - x - \frac{1}{Z} + x^2 + \frac{2x}{Z} + \frac{1}{Z^2} - x^2 = 0$$

لنوحد المقامات ونحذفها

$$-x.Z' - Z + 2xZ + 1 = 0$$

نقسم على $-x$ فيكون لدينا:

$$Z' + \frac{Z}{x} - 2Z - \frac{1}{x} = 0$$

$$Z' + Z(\frac{1}{x} - 2) = \frac{1}{x} \quad \ldots 2$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة.

نحل هذه المعادلة بطريقة تحويل الثوابت.

نأخذ المعادلة المتجانسة المناظرة لها.

$$Z' + (\frac{1}{x} - 2)Z = 0 \quad \ldots 3$$

وهي معادلة ذات متحولات منفصلة نفصل متحولاتها.

$$\int\frac{dZ}{Z} = \int(2 - \frac{1}{x})dx$$

$$\ln Z = 2x - \ln x + \ln c$$

$$\ln\frac{x.Z}{c} = 2x \Rightarrow \text{نأخذ e طرفين} \Rightarrow \frac{x.Z}{c} = e^{2x} \Rightarrow$$

$$④ \quad \boxed{Z = \frac{c}{x}.e^{2x}} \quad \text{الحل العام ③}$$

$$Z' = c'.x^{-1}.e^{2x} + c(-x^{-2}e^{-2x} + 2x^{-1}.e^{2x})$$

نعوض في المعادلة ②

$$c'.e^{2x} = 1 \Rightarrow c' = e^{-2x} \Rightarrow \text{بالمكاملة}$$

$$c = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c_1$$

SUBJECT:

نعوضها في [4] فينتج لدينا :

$$Z = \left(-\frac{1}{2} x^{-1} + c_1 x^{-1} \cdot e^{2x} \right) \Rightarrow$$

$$y = x + \frac{1}{2} = x + \frac{2x}{2c_1 \cdot e^{2x} - 1}$$

بالعودة إلى المتحولات القديمة

وهو الحل العام لريكاتي